VISIT…

LANZAROTE

Caliente.COM

1. NOTIUNI GENERALE.

1.1 Obiectul si importanta topografiei în domeniul tehnic.

Nevoia de cunoastere, caracteristica esentiala a omenirii, dar mai ales necesitatea ca suma cunostintelor acumulate în timp sa fie transmisa generatiilor viitoare s-a facut simtita si în domeniul masuratorilor terestre atât prin gasirea modalitatilor de reprezentare a unor zone prin care oamenii au calatorit cât si a celor în care îsi desfasurau activitatea în mod curent. Sunt cunoscute necesitatile omenirii pentru satisfacerea cerintelor militare, economice, de navigatie, religioase, etc.

Evolutia în timp a masuratorilor terestre a fost conditionata de dezvoltarea stiintelor exacte - matematica si fizica. Instrumentul teoretic al masuratorilor terestre este furnizat de matematica prin principiile si metodele de prelucrare a masuratorilor, instrumentele necesare observatiilor sunt construite pe baza cunostintelor de mecanica, optica si electronica, astronomia permite obtinerea datelor primare necesare prelucrarii retelelor de sprijin pe suprafete mari si stabilirea formei si dimensiunilor Pamântului, pentru ca la sfârsit sa obtinem imaginea micsorata a zonei de interes prin intermediul cunostintelor de cartografie.

Respectarea cerintelor privitoare la fidelitatea reprezentarii pe harta a formelor naturale existente în teren nu se poate face fara legatura cu geografia, geologia si geomorfologia. Cunoasterea geografiei permite o tratare corespunzatoare a elementelor naturale ale terenului cum ar fi relieful, vegetatia, natura solurilor, hidrografia, în timp ce apelând la geologie si geomorfologie se ajunge la formele reliefului si legile de modificare a lor.

Domeniul masuratorilor terestre se poate împarti în urmatoarele ramuri principale:

- *geodezia* - care se ocupa cu studiul, masurarea si determinarea formei si dimensiunilor globului pamântesc sau a unor portiuni întinse ale acestuia. Pentru a se realiza acest lucru, pe suprafata terestra se determina coordonatele spatiale ale unor puncte care prin unirea din aproape în aproape determina vârfurile unor triunghiuri. Odata determinate coordonatele geografice sau rectangulare ale acestor puncte, acestea devin puncte de sprijin pentru toate celelalte masuratori terestre. Totalitatea acestor puncte alcatuieste reteaua de puncte geodezice. Datorita suprafetei mari pe care se desfasoara aceste lanturi de triunghiuri, este necesar ca la prelucrarea masuratorilor sa se tina seama de influenta curburii Pamântului.
- *topografia* - care pornind de la datele furnizate de geodezie (coordonatele unor puncte într-un sistem unitar, care însa nu delimiteaza detalii din teren), sa stabileasca pozitia relativa a obiectelor din teren si sa le reprezinte pe harti sau planuri. Caracteristic pentru lucrarile topografice este ca acestea se desfasoara pe suprafete relativ mici în care influenta curburii Pamântului este considerata neglijabila.
- *fotogrametria* - poate fi considerata ca o tehnica noua în masuratorile terestre în sensul ca pozitia unor detalii se obtine direct pe fotografii speciale, metrice, numite fotograme, executate în anumite conditii, fie din avion (denumite fotograme aeriene) fie de la nivelul solului (fotograme terestre). Ca si topografia, exploatarea fotogramelor se face utilizând reteua de sprijin creata cu ajutorul geodeziei.

Prin produsele pe care le furnizeaza - harti si planuri - masuratorile terestre sunt indispensabile diverselor domenii de activitate, indiferent de stadiul de executie al unei lucrari; sunt folosite la constructia si sistematizarea teritoriala, la organizarea teritoriului agricol, la amenajarea silvica sau hidrologica, în prospectarea si exploatarea zacamintelor de substante utile, precum si la elaborarea de studii si cercetari în domeniul hidrografic, pedologic, geologic, geografic.

Importanta stiintifica a masuratorilor terestre consta în aceea ca furnizeaza date necesare studierii formei si dimensiunilor reale ale Pamântului si modificarile în timp ale acestora.

1.2 Elementele topografice ale terenului.

1.2.1 Forma si dimensiunile Pamântului.

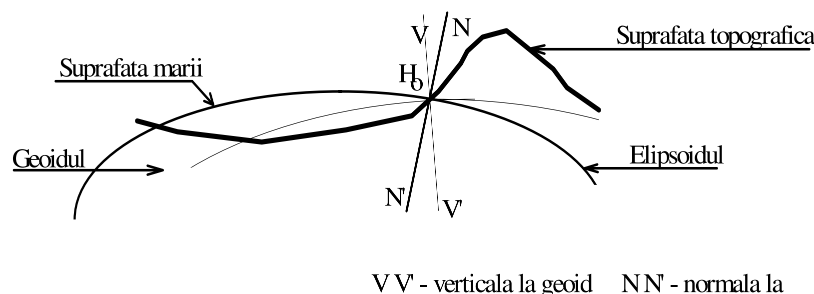


Figura 1.1 - Suprafata topografica, geoidul si elipsoidul de referinta.

Sectionarea cu un plan vertical a scoartei terestre permite observatia ca se disting trei curbe care intereseaza si anume : suprafata topografica, geoidul si elipsoidul de referinta (fig.1.1).

Suprafata topografica este de fapt urma terenului lasata pe planul de sectiune, urma care datorita neregularitatilor nu se poate exprima printr-un model matematic. Este suprafata care face obiectul reprezentarilor pe harti si planuri.

Geoidul reprezinta locul geometric al punctelor care materializeaza nivelul marilor si oceanelor, nivel neafectat de miscarea valurilor, curenti sau mareelor, prelungit pe sub continente. Numit si suprafata de nivel zero, nu se poate exprima printr-un model sau formula matematica. Datorita faptului ca nu reprezinta nici macar aproximativ configuratia terenului natural, nu face obiectul reprezentarii pe harti si planuri, fiind de fapt o forma geometrica ipotetica din punct de vedere al exprimarii.

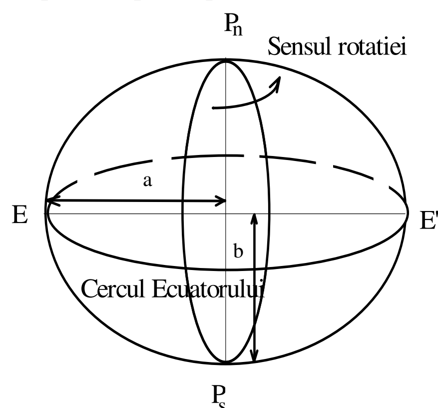


Figura 1.2 - Elipsoidul de referinta.

Elipsoidul de referinta a aparut ca urmare a imposibilitatii reprezentarii terenului sau a geoidului pe harti şi planuri prin coordonate. Fiind descris de o relatie matematica, corespondenta reciproca între puncte din teren şi omoloagele lor pe elipsoid permite raportarea acestora pe harti şi planuri prin coordonate, într-un sistem unic şi unitar. În timp, s-au folosit o serie de elipsoizi de referinta care au purtat numele celor care le-au descris prin marimile lor caracteristice: Delambre, Bessel, Heyford, Krasovski. Pentru toate tipurile de elipsoizi cunoscuti, elementele caracteristice cu valorile acestora numai pentru elipsoidul Krasovski,sunt:

a = 6378245 m (semiaxa mare)
b = 6356863 m (semiaxa mica)
a = (a-b)/a = 1/298,3 (turtirea elipsei)

1.2.2 Proiectia punctelor în geodezie si topografie.

Elementul care defineste modalitatea de proiectare a punctelor pe o suprafata este marimea acesteia în sensul ca la suprafetele mari se impune sa se tina cont de curbura Pamântului (cazul unor regiuni, tari, continente sau întreg globul), în timp ce daca suprafata determinata de puncte este mica, influenta curburii se poate neglija. În primul caz avem de-a face cu ceea ce se numeste proiectie geodezica iar în al doilea caz cu o proiectie topografica a punctelor.

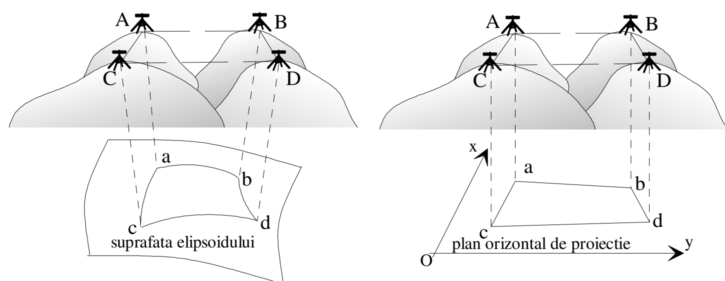


Figura 1.3 - Proiectia geodezica si proiectia topografica a punctelor

Prin proiectia geodezica a punctelor de triangulatie A, B, C, D pe suprafata elipsoidului în punctele a, b, c, d se obtin triunghiuri cu laturi curbe, laturi care se numesc si linii geodezice.

Se poate observa (figura 1.3) ca în acest caz proiectantele punctelor de triangulatie sunt convergente catre o zona din centrul globului pamântesc.

Daca suprafata pe elipsoid este mica (cazul punctelor apropiate), putem asimila elipsoidul cu o suprafata plana fara ca precizia coordonatelor si pozitia punctelor sa sufere. În acest caz proiectantele punctelor vor fi paralele între ele, iar pozitia punctelor de triangulatie se defineste prin coordonatele rectangulare plane x, y precum si prin cota H reprezentand distanta pe verticala de la suprafata de nivel zero la punctul din teren. Se poate observa ca totdeauna distantele care se pot determina pe planuri reprezinta de fapt proiectii orizontale ale distantelor înclinate corespondente.

1.2.3 Proiectii cartografice.

Deoarece în cazul general se impune reprezentarea grafica a unor suprafete întinse ale globului, se constata existenta a doua dificultati mari:

- suprafata globului este curba, apropiata de o sfera;
- reprezentarea reliefului ar trebui sa fie tridimensionala.

Aceste dificultati se pot elimina prin alegerea unui numar suficient de puncte caracteristice, proces numit si geometrizarea terenului, dupa care suprafetele curbe se transforma, prin calcule, în suprafete plane. O astfel de transformare nu se poate face însa fara ca distantele de pe elipsoid sa nu sufere modificari. Functie de sistemul de proiectie adoptat se pot modifica si alte elemente cum sunt unghiurile sau suprafetele. Clasificarea proiectiilor cartografice se va face deci functie de elementele care se pastreaza nemodificate, astfel:

- *conforme* sunt cele care pastreaza unghiurile nedeformate;
- *echivalente* sunt cele care pastreaza suprafetele nedeformate;
- *echidistante* sunt cele care pastreaza numai anumite distante nedeformate;
- *arbitrare* sunt cele care nu pastreaza nici un element nedeformat.

Din cele prezentate putem constata ca deformatiile pot fi liniare, unghiulare sau areolare (deformarea suprafetelor). Un alt criteriu de clasificare al proiectiilor cartografice este cel al modului de realizare a reprezentarii, care conduce la aspectul retelei cartografice; în acest caz clasificarea se prezinta astfel:

- *azimutale* sunt proiectiile în care reprezentarea se face pe un plan tangent sau secant la sfera în punctul central al zonei de reprezentat;
- *cilindrice* sunt cele în care reprezentarea se face pe un cilindru care are o pozitie oarecare fata de sfera (nu este obligatoriu sa fie tangent).
- *conice* sunt cele la care reprezentarea se face pe un con tangent sau secant la sfera. Ca variante ale acestora sunt cunoscute proiectiile policonice si cele pseudoconice.

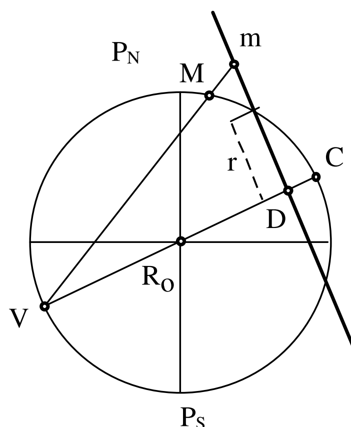


Figura 1.4 - Proiectia stereografica.

Din prima categorie face parte proiectia stereografica, care, pentru teritoriul României a fost aplicata şi cunoscuta initial ca "proiectia stereografica 1933" şi mai recent "proiectia stereografica 1970"; pozitia punctului central în cele doua proiectii difera în sensul ca prima avea acest punct în zona Brasov pentru ca a doua sa-l aiba în zona Fagaras.

În figura 1.4 sunt ilustrate elementele ce caracterizeaza o proiectie stereografica :

C - centrul de proiectie,
V - punctul de vedere,
R_0 - raza medie de curbura la centrul de proiectie,
CD - adâncimea planului de proiectie,
M - un punct pe elipsoid,
m - proiectia pe planul secant a punctului M,
r - raza cercului de secanta

Din a doua categorie, pentru tara noastra a fost folosita "proiectia Gauss". Reprezentarea elipsoidului se face în acest caz prin zone denumite fuse având în general 6° pe longitudine. Meridianul origine, numit şi "meridian 0", este cel care trece prin Observatorul Greenwich. Facilitatile acestei proiectii constau în aceea ca permite reprezentarea întregului glob pe zone cuprinse între cei doi poli.

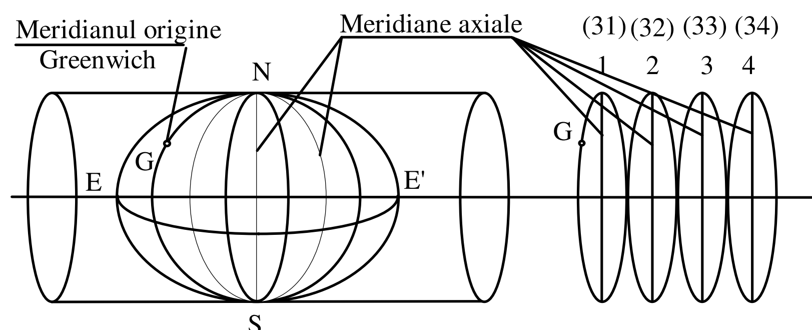


Figura 1.5 - Proiectia Gauss.

Dezavantajele se refera la situatia teritoriilor relativ mici care se reprezinta uneori pe doua fuse vecine (cazul tarii noastre în L - 34 şi L - 35), precum şi la faptul ca deformatiile sunt uneori mai mari decât în alte proiectii.

1.2.4 Elementele topografice ale terenului.

În mediul înconjurator se afla o serie de obiecte naturale (vai, dealuri, munti, ape) şi artificiale, aparute datorita omului (constructii, limite între folosinte sau proprietati), toate alcatuind detalii topografice.

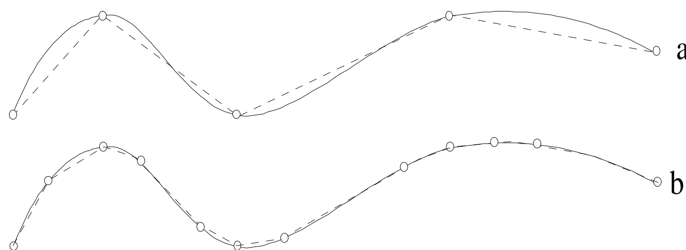


Figura 1.6 - Geometrizarea terenului

Pentru determinarea formei şi pozitiei acestora, se aleg pe detaliu puncte caracteristice denumite topografice, reprezentând schimbari de directie ale unui contur sau a pantei terenului, sau minimum de puncte în functie de care sa se poata reprezenta orice detaliu sau forma de teren (figura 1.6). La stabilirea minimului de puncte este necesar sa se cunoasca scara planului sau a hartii.

Detaliile topografice sunt în general alcatuite din linii sinuoase a caror determinare şi exprimare matematica ar fi practic imposibila şi apoi chiar şi inutila. Aceeaşi linie sinuoasa se poate transforma într-o linie frânta care sa îmbrace şi sa înlocuiasca cu suficienta fidelitate conturul initial. În fugura 1.6 sunt prezentate doua moduri de a geometriza un contur sinuos : în cazul "a", datorita faptului ca s-au ales putine puncte pe contur, geometrizarea este incorecta, în timp ce în cazul "b", datorita numarului adecvat de puncte alese, linia frânta care aproximeaza conturul sinuos este mult mai aproape ca forma de acest contur. Operatiunea poarta denumirea de geometrizarea terenului şi se poate face atât în plan orizontal, când un punct se determina prin coordonate **x** şi **y,** cât şi în plan vertical, situatie în care determinarea se face prin cota şi distanta fata de un reper ales.

Doua sunt categoriile de elemente care se masoara în teren şi anume cele liniare respectiv unghiulare.

Intersectia suprafetei topografice cu un plan vertical ce trece prin punctele M şi N se numeste aliniament, fiind o linie sinuoasa în plan vertical, în timp ce în plan orizontal este o linie dreapta.

Materializarea unui aliniament între doua puncte şi reprezentarea lui într-o sectiune verticala (fig.1.7) conduce la definirea urmatoarelor elemente topografice ale terenului:

- *distanta înclinata*, L, între punctele A şi B, este lungimea liniei drepte între punctele marcate în teren; ea este linia geometrizata între punctele A şi B din teren.
- *distanta orizontala*, D, reprezinta proiectia într-un plan orizontal a distantei înclinate L.
- *unghiul de panta* α este unghiul format de orizontala ce trece printr-un punct si directia catre cel de-al doilea punct.

Unghiurile de panta, la fel ca si diferenta de nivel, pot fi pozitive sau negative. Pozitive sunt unghiurile de panta catre toate punctele situate deasupra liniei orizontului, dupa cum unghiurile de panta sunt negative pentru toate punctele situate sub liniei orizontului. Daca directia de referinta nu este orizontala ce trece printr-un punct ci verticala locului, atunci unghiul format de verticala cu directia MN se numeste unghi zenital, notat cu "z". Între unghiul zenital si unghiul de panta al unei directii date exista totdeauna relatia:

$$z + \alpha = 100^g \qquad [1.1]$$

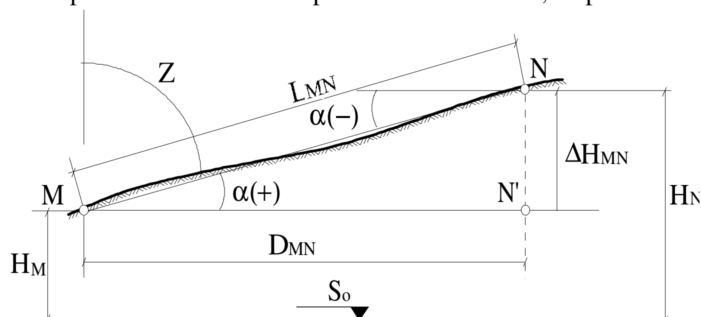


Figura 1.7 - Elementele topografice ale terenului.

- *diferenta de nivel* $\Delta H_{MN} = H_N - H_M$,este distanta pe verticala între planele orizontale ce trec prin punctele M si N. Din figura 1.7 se observa ca diferenta de nivel poate fi pozitiva (de la M la N) sau negativa (de la N la M). Marimea diferentei de nivel între punctele M si N se poate calcula, functie de lungimea înclinata L si unghiul de panta α cu relatia :

$$\Delta H_{MN} = L.\ \sin\alpha = D.tg\alpha \qquad [1.2]$$

sau, daca se cunoaste marimea unghiului zenital, Z:

$$\Delta H_{MN} = L.\ \cos Z = D.ctgZ \qquad [1.3]$$

- *cota unui punct* se defineste ca distanta pe verticala de la suprafata de referinta la planul orizontal ce trece prin acel punct. Din figura 1.7 se poate deduce cota punctului N, H_N, functie de cota punctului M, H_M, presupusa cunoscuta si diferenta de nivel ΔH_{MN} calculata cu relatiile [1.2] sau [1.3].
- unghiul orizontal β (figura 1.8), între directiile MN si MP este unghiul diedru format de planele verticale ce contin punctele M si N (planul V_N), respectiv M si P (planul V_P). Marimea lui se obtine din diferenta directiilor catre punctele P si N, putând avea valori cuprinse între 0^g si 400^g.

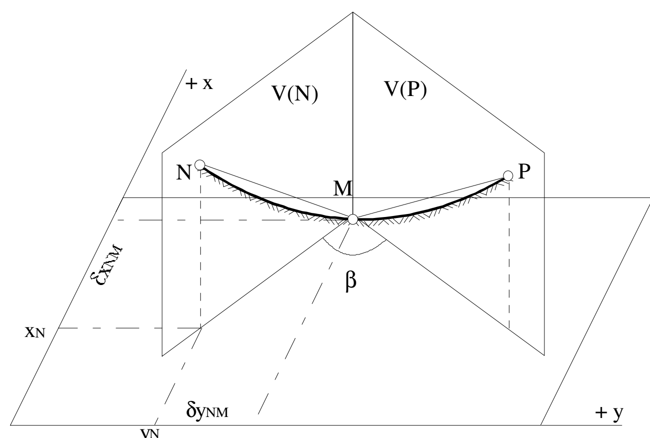


Figura 1.8 - Unghiul orizontal între doua aliniamente.

- *orientarea directiei MN,* θ_{MN}, se defineste ca unghiul format de directia nordului cu directia de masurat (MN), unghi masurat în sensul orar. Orientarea unei directii se calculeaza din coordonatele punctelor ce determina directia, cu relatii de tipul :

$$tg\theta_{MN} = \frac{\delta y_{MN}}{\delta x_{MN}} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \quad sau \quad ctg\theta_{MN} = \frac{\delta x_{MN}}{\delta y_{MN}} = \frac{x_N - x_M}{y_N - y_M} \qquad [1.4]$$

- *pozitia unui punct în plan* se defineste fie prin coordonatele rectangulare x si y, fie prin coordonatele polare.

Coordonatele punctului M din figura 1.8 se calculeaza functie de coordonatele punctului N cu relatiile:

$$X_M = X_N + \delta x_{NM} = X_N + d_{NM}\ .\ \cos\theta_{NM} \qquad [1.5]$$
$$Y_M = Y_N + \delta y_{NM} = Y_N + d_{NM}\ .\ \sin\theta_{NM}$$

1.2.5 Unitati de masura.

Functie de elementele care se determina în operatiile topografice, în tara noastra se folosesc unitatile de masura ale sistemului international şi anume:

- pentru lungimi, metrul cu multiplii şi submultiplii sai;
- pentru suprafete, unitatile ce deriva din cele folosite la lungimi, metrul patrat, kilometrul patrat; se mai folosesc însa şi arul,respectiv hectarul, astfel:

10 m x 10 m = 1 a (un ar) [1.6]
100 m x 100 m = 100 a = 1 ha (un hectar)

- pentru unghiuri,gradele şi radianii. Datorita dificultatilor de exprimare în sistemul zecimal, gradatia sexagesimala a fost înlocuita cu gradatia centesimala. Astfel, un cerc are 400 grade centesimale, (notate 400^g), iar un cadran 100^g. Submultiplii sunt minutul centesimal, egal cu 1/100 dintr-un grad (notat 1^c), respectiv secunda, egala cu 1/100 dintr-un minut (notata 1^{cc}). Pentru transformari dintr-un sistem în altul, se folosesc urmatoarele relatii:

din sexagesimal în centesimal : $1° = 1{,}111111^g$ [1.7]

din centesimal în sexagesimal : $1^g = 0{,}9°$ [1.8]

Radianul este unghiul caruia i se opune un arc egal cu raza cercului pe care-l descrie. Legatura între radian şi unitatile de masura în grade este:

sexagesimal $\rho'' = 206265''$ [1.9]

centesimal $\rho^{cc} = 636620^{cc}$ [1.10]

1.3 Suprafete de referinta şi sisteme de coordonate.

1.3.1 Suprafete de referinta.

Determinarea în plan vertical a pozitiei punctelor se face prin raportare la geoid, caz în care suprafata se numeste suprafata de nivel zero. Pozitia acesteia se obtine prin observatii multianuale. Aparatele cu care se determina cota marii sau oceanului se numesc medimaregrafe sau medimaremetre. Ele constituie punctele fundamentale pentru originea cotelor în lucrarile de masuratori terestre.

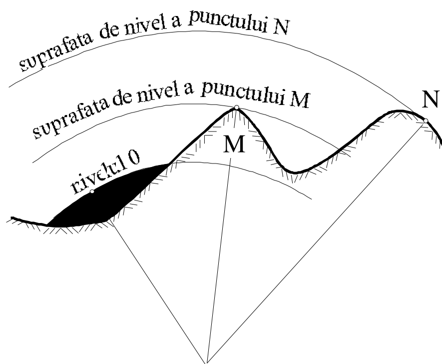


Figura 1.9 - Suprafete de nivel.

Suprafata care este normala în fiecare punct al ei la directia verticalei se numeste suprafata de nivel. Altitudinea sau cota absoluta a punctului topografic se defineste ca fiind distanta pe verticala între suprafata de nivel zero şi suprafata de nivel ce trece prin punctul considerat.

În cazul suprafetelor mari se poate considera ca Pamântul este aproximativ sferic, iar suprafetele de nivel, inclusiv suprafata de nivel zero sunt sfere concentrice în centrul Pamântului (figura 1.9). Pentru suprafete mici, se considera ca suprafetele de nivel, inclusiv cea de nivel zero, sunt plane paralele şi orizontale între ele.

Pentru anumite lucrari desfasurate pe suprafete mici si precis definite, este posibil ca suprafata de nivel, considerata originea în determinarea cotelor, sa fie alta decât suprafata de nivel zero, aleasa conventional; în acest caz spunem ca avem de-a face cu o altitudine conventionala a punctului. În acest caz, cotele tuturor punctelor de pe aceasta suprafata, vor diferi fata de cotele absolute cu aceeaşi cantitate, egala cu distanta pe verticala între suprafata de nivel zero şi suprafata conventional aleasa. În aceste conditii, relieful terenului este reprezentat pe harti sau planuri identic, indiferent de sistemul de referinta ales pentru cote (absolut sau conventional).

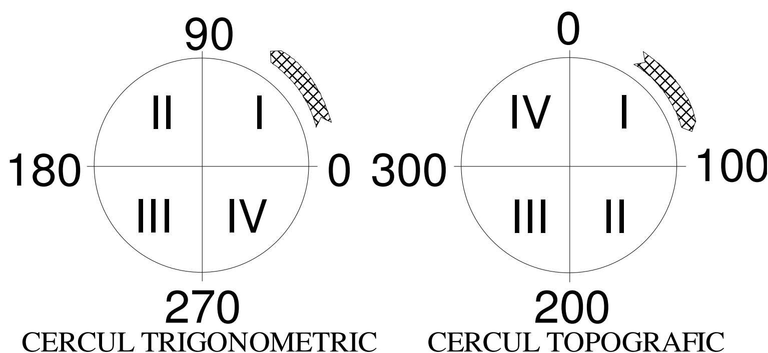


Figura 1.10 - Cercul trigonometric si cercul topografic.

1.3.2 Sisteme de coordonate.

Pentru a cunoaste directiile cardinale ale hartilor şi planurilor, acestea trebuie sa fie orientate. Acest lucru înseamna ca directii identificate pe o harta sau plan sa fie facute paralele cu omoloagele lor din teren prin rotirea în mod convenabil a hartii sau planului. Directia care se foloseste în orientarea lucrarilor de masuratori terestre, numita directie de referinta, este directia nordului geografic. Deoarece determinarile se fac în sens orar, pentru a se pastra relatiile cunoscute din trigonometrie, s-a adoptat cercul topografic, la care numerotarea cadranelor se face în sens orar, pornind de la directia nordului.

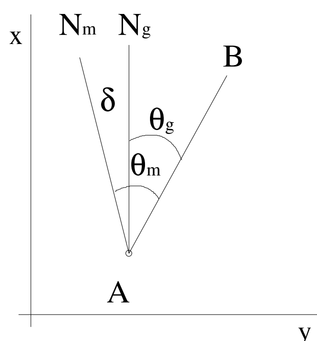


Figura 1.11 - Tipuri de orientari.

Deoarece exista nordul geografic (stabil în timp) şi nordul magnetic (variabil în timp îndelungat), rezulta ca şi orientarile pot fi geografice (fixe în timp) şi magnetice (usor variabile în timp). Prin orice punct de pe suprafata terestra pot fi duse un meridian geografic şi unul magnetic; implicit, o directie oarecare, într-un sistem de axe de coordonate este orientata fata de o paralela la meridianul axial şi nu fata de meridianul geografic al locului respectiv. Considerând (figura 1.11) o directie A-B în teren, fata de aceasta se disting urmatoarele orientari:

- *orientarea magnetica* (sau azimutul magnetic), care este unghiul format de directia nordului magnetic cu directia A-B;
- *orientarea geografica* (sau azimutul geografic) care este unghiul format de directia nordului geografic cu directia A-B;

Unghiul format de cele doua orientari poarta denumirea de deviatie magnetica δ. Acest unghi este necesar în cazul determinarii orientarilor cu busola, în vederea corectarii acestora pentru a se putea raporta la orientari geografice.

1.4 Notiuni de teoria erorilor de masurare.

Având în vedere ca orice masuratoare, oricât de precis ar fi executata, este însotita de mici diferente fata de valoarea reala a marimii respective, vom defini erorile ca fiind micile diferente care apar la masurarea repetata a unei marimi. Este de mentionat ca valoarea reala a marimii masurate nu este niciodata cunoscuta.

Cauzele care conduc la aparitia erorilor se refera la:

- imperfectiunilor constructive ale aparaturii sau dispozitivelor cu care se executa masuratorile, erorile numindu-se erori instrumentale;
- datorita operatorului care executa masuratorile, caz în care erorile se numesc erori personale;
- datorita conditiilor de mediu în care se efectueaza masuratorile, situatie în care erorile se numesc erori datorate conditiilor exterioare;

Este de remarcat ca niciodata, categoriile enumerate mai sus nu actioneaza singure, ci apar toate la un loc. Eroarea se defineste matematic ca diferenta între valoarea eronata şi valoarea justa, iar corectia este totdeauna diferenta între valoarea justa şi valoarea eronata. Daca notam cu v_j valoarea justa si cu v_e valoarea eronata, putem scrie:

$$e = v_e - v_j \quad [1.11]$$

dupa cum :

$$c = v_j - v_e \quad [1.12]$$

Din expresiile [1.11] si [1.12] se poate scrie ca :

$$e = -c \quad \text{sau} \quad c = -e \quad [1.13]$$

Daca asupra unei marimi se vor face un numar mare de determinari, se vor calcula abaterile fiecarei determinari fata de media aritmetica si se va întocmi un grafic pe care se vor raporta pe abscisa marimea erorilor si pe ordonata frecventa aparitiei unei valori a erorii, se va obtine un grafic al unei curbe, cunoscuta sub numele de "curba clopot GAUSS', reprezentând de fapt curba de distributie normala a erorilor întâmplatoare.

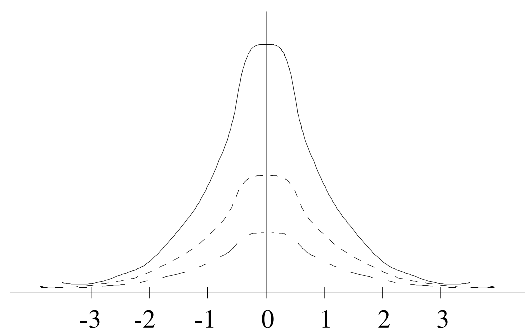


Figura 1.12 - Distributia normala a erorilor.

Clasificarea erorilor se poate face dupa:

1. <u>*marimea lor:*</u>

- erori propriu-zise, care sunt acceptate în procesele de masurare;
- erori grosolane, numite şi greseli, care nu se accepta în şirul de masuratori, motiv pentru care, la prelucrare, sunt eliminate.

2. <u>*modul de propagare*</u>:

- sistematice, caracterizate prin aceea ca sunt constante ca semn şi marime. Acest tip de erori nu se pot elimina, dar influenta lor poate fi anulata prin calcul.
- întâmplatoare sau accidentale, apar aleator ca semn şi valoare, iar influenta lor nu se cunoaste şi nu se poate diminua.

3. <u>*valoarea de referinta*</u>:

- reale, care reprezinta diferentele între diversele valori din şirul de determinari şi valoarea reala a marimii masurate. Se poate lesne constata ca deoarece valoarea reala a marimii nu este cunoscuta, nici erorile reale nu se pot determina.
- erori aparente, care reprezinta diferenta între fiecare valoare din şirul de masuratori şi valoarea cea mai probabila, definita ca media aritmetica a celor "n" determinari. În cazul unui numar de determinari facute asupra aceleasi marimi, de un singur operator, cu un singur instrument de masura si în conditii meteo aproximativ identice, suma erorilor aparente tinde la 0. Vom nota cu v erorilor aparente, cu M_i masuratorile propriu-zise si cu M media celor "n determinari, putem scrie:

$$\begin{aligned} v_1 &= M_1 - M \\ v_2 &= M_2 - M \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{v_n} &\underline{= M_n - M} \end{aligned} \quad [1.14]$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = M_1 + M_2 + \ldots + M_n - n \cdot M \quad [1.15]$$

Daca notam suma erorilor v_i cu [v] si suma masuratorilor cu [M], relatia [1.15] se poate scrie sub forma:

$$[\, v\,] = [\, M\,] - n.M = 0$$

si deci:

$$[\ v\ ] = 0 \qquad [1.16]$$

care constitue criteriul de apreciere a corectitudinii prelucrarii masuratorilor.

Pornind de la considerentul ca un şir de masuratori este reprezentat ca o functie de cele "n" determinari, asimilate ca "n" variabile, erorile sunt derivatele de ordinul I în raport de aceste determinari.

Diferenta între oricare doua masuratori din şirul de masuratori efectuate, se numeste ecart; daca aceasta diferenta se face între valoarile extreme, se numeste ecart maxim.

Pentru a putea fi prelucrat, şirul determinarilor trebuie sa se încadreze în toleranta T, care se defineste ca fiind ecartul admisibil între masuratori. Valoarea tolerantei se precizeaza prin instructiuni tehnice şi valoarea ei este obligatoriu de respectat în orice gen de lucrari de masuratori terestre. Tehnica care se ocupa cu modul de prelucrare a masuratorilor şi ajungerea la valoarea cea mai probabila se numeste teoria erorilor de masurare, iar procedeul se numeste al celor mai mici patrate.

Dupa modul în care se obtin, marimile masurate pot fi:

1. *directe*, caracterizate prin aceea ca observatiile sunt facute direct cu instrumentul asupra marimii care se masoara, de exemplu, masurarea cu ajutorul ruletei a unei distante;
2. *indirecte*, în care, prin calcul, din marimi determinate direct se obtin marimile care intereseaza. Un exemplu este determinarea a doua laturi într-un triunghi în care se cunosc toate unghiurile si o latura.
3. *conditionate*, în care marimile masurate direct trebuie sa raspunda unor conditii, ca de exemplu, suma unghiurile masurate într-un triunghi sa fie egala cu 200^g.

Din punct de vedere al modului de efectuare a observatiilor sau al aparaturii folosite, se disting:

a) masuratori de aceeaşi precizie, în care determinarile se fac cu aceeaşi metoda, de un singur operator care foloseste un singur aparat se numesc masuratori de ponderi egale.
b) masuratori ponderate care se efectueaza cu aparate diferite, de catre operatori diferiti, în conditii şi cu instrumente diferite.

1.4.1 Eroarea medie patratica individuala.

Pornind de la forma generala a ecuatiilor de erori,şi anume:

$$\begin{aligned} v_1 &= M_1 - M \\ v_2 &= M_2 - M \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= M_n - M \end{aligned} \qquad [1.17]$$

pentru a se înlatura incertitudinile datorate semnelor + şi - ale erorilor v_i, se ridica la patrat suma erorilor şi prin însumare se ajunge la eroarea medie patratica individuala:

$$e_q = \pm\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots\ v_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{\left[v^2\right]}{n}} \qquad [1.18]$$

Aceasta eroare constituie un criteriu de apreciere calitativa a şirului de masuratori luate individual. Asupra valorii erorii medii patratice individuale actioneaza preponderent erorile întâmplatoare cu valoare absoluta mare, tocmai cele care determina gradul de siguranta al masuratorilor. Datoritafaptului ca aceasta eroare este relativ stabila, este practic suficient un numar relativ mic de determinari pentru a obtine aceasta eroare cu o precizie satisfacatoare.

1.4.2 Eroarea medie a mediei aritmetice.

Pornind de la "i" masuratori efectuate în aceleaşi conditii asupra unei singure marimi M, valoarea cea mai probabila se accepta a fi media aritmetica. Se poate deci scrie ca:

$$M = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{n} \qquad [1.19]$$

sau:

$$M = \frac{1}{n}\ M_1 + \frac{1}{n}\ M_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ M_n \qquad [1.20]$$

daca acceptam ca fiecare masuratoare este afectata de aceeasi eroare, e_q, în timp ce eroarea medie patratica a valorii M va fi e_M, prin ridicare la patrat si neglijând termenii de ordinul II (adica produsele între termenii "i" si "j"), atunci putem scrie ca :

$$\begin{aligned} e_M^2 &= \frac{1}{n^2}\mathrm{e}_q^2 + \frac{1}{n^2}e_q^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}\mathrm{e}_q^2 = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}^2}e_q^2 = \frac{1}{n}e_q^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e_M &= \pm\frac{e_q}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{\left[vv\right]}{n(n-1)}} \end{aligned} \qquad [1.21]$$

Acesta marime este este un criteriu de apreciere a preciziei masuratorilor.